Ejercicios de Análisis Funcional

Relación 1 - Espacios normados. Conceptos básicos

1. Prueba que todo conjunto finito no vacío parcialmente ordenado tiene algún elemento maximal.

2. Prueba que en todo espacio normado $(X, \| \|)$ se verifica la desigualdad:

   $$\big|\|x-y\| - \|z-u\|\big| \leqslant \|x-z\| + \|y-u\|$$

   Deduce que

   $$\big|\|x-z\| - \|z-y\|\big| \leqslant \|x-y\|, \quad \big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x \pm y\|$$

   Interpreta geométricamente los resultados obtenidos y deduce que la norma $\| \| : X \to \mathbb{R}$ es una aplicación continua.

3. Sea X un espacio normado. Prueba que

   $$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leqslant \frac{2\|x-y\|}{\text{máx}\,\{\|x\|, \|y\|\}} \qquad (x, y \in X \setminus \{0\})$$

   Deduce que si $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy de elementos no nulos de X que no converge a cero, entonces la sucesión $\left\{ \dfrac{x_n}{\|x_n\|} \right\}$ también es de Cauchy.

4. Sea X un espacio normado, $x, y \in X$ y supongamos que $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$. Prueba que para todos $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ se verifica que $\|\alpha x + \beta y\| = \alpha\|x\| + \beta\|y\|$.

5. Sea $(X\| \|)$ un espacio normado. Prueba que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   a) Existen vectores linealmente independientes, $x, y \in X$ tales que $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$.

   b) Existen vectores linealmente independientes, $u, v \in S_X$, tales que $\left\| \dfrac{u+v}{2} \right\| = 1$.

   c) Existen vectores $u, v \in S_X$, con $u \neq v$, tales que el segmento $[u, v]$ está contenido en S_X.

   Deduce de lo anterior que si la esfera S_X no contiene segmentos no reducidos a un punto, y x, y son vectores no nulos tales que $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$, entonces $x = \lambda y$ con $\lambda > 0$.

6. Sea X un espacio normado, $x, y \in X$, y $r > 0, s > 0$. Prueba que:

   a) $\overline{B}(x,r) \cap \overline{B}(y,s) \neq \varnothing \iff \|x-y\| \leqslant r+s$.

   b) $B(x,r) \cap B(y,s) \neq \varnothing \iff \|x-y\| < r+s$.

   c) $\overline{B}(x,r) \subset \overline{B}(y,s) \iff \|x-y\| \leqslant s-r$.

7. Prueba que en todo espacio normado se verifica que:

   a) La adherencia de una bola abierta es la correspondiente bola cerrada.

   b) El interior de una bola cerrada es la correspondiente bola abierta.

   c) El diámetro de una bola es igual al doble de su radio.

8. Sea X un espacio normado y A, B subconjuntos no vacíos de X. Prueba que:

   a) Si A es abierto, entonces $A + B$ es abierto.

   b) Si A es cerrado y B es compacto, entonces $A + B$ es cerrado.

   Da un ejemplo de dos conjuntos cerrados en un espacio normado cuya suma no sea un conjunto cerrado.

9. Sea X un espacio normado y M un subespacio vectorial de X. Prueba que si el interior de M no es vacío entonces $M = X$.

10. Sea X un espacio normado y $A \subset X$. Prueba que $\overline{A} = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} (A + B(0, 1/n))$.

11. Sea K un compacto no vacío en un espacio normado. Prueba que existen puntos $a, b \in K$ tales que $\|a - b\| = \text{diam}(K)$.

12. Sea $\{K_n\}$ una sucesión decreciente de compactos no vacíos en en un espacio normado y sea $K = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Prueba que $K \neq \emptyset$ y $\text{diam}(K) = \lim\limits_{n\to\infty} \text{diam}(K_n)$.